DEVOIR DE SYNTHESE N°2

4 ème Math　　　　　　　　　　Durée : 4h

Exercice n°1

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AD].

1/ On note par S similitude directe qui transforme D en O et C en I.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Trouver une construction géométrique du centre K de S.

2/ a) Préciser les images par S des droites (BD) et (BC).

b)Déterminer les images par S des points B et A.

c) Montrer que K est le barycentre des points (B , 1) et (J , 4).

3/ Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h = R o S.

a) Déterminer h (B).

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de h.

c) On note $L = K * B$. Montrer que le triangle OKL est rectangle et isocèle.

4/ Soit f la similitude indirecte telle que f (D) = O et f (C) = I.

a) Montrer que $f = S_{(OI)} \circ S$ et déterminer f (B).

b) Donner alors la forme réduite de f.

Exercice n°2

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 5 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives : i ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+i$.

On appelle I, J et K les milieux respectifs des segments [O B] ; [A C] et [B C] et s la similitude directe qui transforme A en I et O en B.

1/ a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Vérifier que s est l'application qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} i\, z + \sqrt{2}$.

c) En déduire l'affixe ω du centre Ω de s. Représenter Ω dans le plan P.

d) Quelle est l'image par s du rectangle AOBC ?

2) On considère la transformation $s^2 = s \circ s$.

a) Quelles sont les images des points O, B et A par s^2 ?

b) Montrer que s^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c) En déduire que les droites (OC) , (BJ) et (AK) sont concourantes.

Problème

Partie A

On considère pour tout entier naturel non nul n la fonction f_n définie sur $]-1, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^n}$.

On désigne par $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.

b) Exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

2/ a) Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

b) Construire les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ dans le même repère.

c) Calculer l'aire de la partie $\mathscr{D}$ délimitée par $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3/ Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = n I_{n+1} - 1 + \dfrac{e}{2^n}$ (utiliser 1/ b).

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Partie B

Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{2\,\mathrm{Log}\,x} \frac{e^t}{1+t}\, dt$.

1/ a) Vérifier que pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $e^t \geq 1 + t$ et que $F(x) \geq 2\,\mathrm{Log}\,x$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

2/ a) Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a :

$$F(x) = \int_1^x \frac{2t}{1+2\,\mathrm{Log}\,t}\, dt.$$

3/ a) Montrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$ on a :

$$F(x) \geq \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{2t}{1+2\,\mathrm{Log}\,t}\, dt.$$

b) En utilisant le théorème de la moyenne, montrer qu'il existe un réel $c \in [\frac{x}{2}, x]$ telle que $F(x) \geq \dfrac{x\,c}{1+2\,\mathrm{Log}\,c}$.

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$.

4/ On désigne par Γ la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

a) Dresser le tableau de variation de F.

b) Donner une équation de la demi tangente Δ à Γ au point d'abscisse 1.

c) Tracer Δ et donner l'allure de Γ.